DEUXIÈME COMPOSITION
(Option générale) Durée : 3 heures

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$). Un compteur, initialisé au départ à 0, affiche à l'issue de chaque lancer la différence entre le nombre de "pile" et le nombre de "face" obtenus. Ainsi, après la suite de lancers : "PPFPF", le compteur affichera 1, après : "FFP", il affichera -1.

PRELIMINAIRES

x désigne ici un élément de]-1,1[. Justifier les égalités :

1. $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} C_{2n}^{n}$$

2. $$\sqrt{1-x^2} = 1 - 2\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$$

PREMIERE PARTIE : *TEMPS DE RETOUR EN ZERO*

Dans toute cette partie, n désignera un entier naturel et on notera S_n la variable aléatoire égale à l'entier relatif affiché, à l'issue du n-ième lancer, par le compteur, en convenant que S_0 est la variable certaine nulle. On suppose dans cette partie que n est non nul.

1.a) Déterminer : $P[S_n = 0]$; on pourra distinguer 2 cas suivant la parité de n.
1.b) B_n désigne ici la variable de Bernoulli qui vaut 1 lorsque l'événement $[S_n = 0]$ est réalisé et 0 sinon. Donner sa loi, son espérance et sa variance.
1.c) On note R_n le nombre de fois où 0 est affiché au compteur aux différents instants k, avec $(1 \leq k \leq n)$. On a donc la relation :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

En déduire l'égalité : $$E[R_{2n}] = \sum_{k=1}^{n} C_{2k}^{k} p^k (1-p)^k$$

2. Dans cette question, on suppose p différent de 1/2.
2.a) Montrer que l'on a : $0 < 4p(1-p) < 1$
2.b) Justifier, en utilisant les résultats de la question préliminaire, la relation :

$$\lim_{n\to+\infty} E[R_{2n}] = \frac{1}{|1-2p|} - 1$$

DEUXIEME PARTIE : *PREMIER TEMPS DE RETOUR EN ZERO*

Pour tout k entier naturel non nul, on notera A_k l'événement : "0 s'affiche pour la première fois (sans compter l'affichage initial) au compteur à l'issue du k-ième lancer".

1.a) Exprimer A_k à l'aide des variables S_j $(0 < j \leq k)$.

1.b) Montrer que les A_k sont disjoints.

1.c) En interprétant l'événement : $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$

justifier l'inclusion : $[S_n = 0] \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

1.d) En déduire : $P[S_n = 0] = \sum_{k=1}^{n} P[(S_n = 0) \cap A_k]$

2.a) Justifier les relations pour n et k entiers naturels non nuls :
$P[(S_n = 0) / A_k] = P[S_{n-k} = 0]$ si $k \leq n$ et $P[(S_n = 0) / A_k) = 0$ si $k > n$.

2.b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P[S_n = 0] = \sum_{k=1}^{n} P[S_{n-k} = 0] \times P[A_k]$$

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = P[S_n = 0] \text{ et } v_n = P[A_n]$$

De plus on définit : $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$

On notera respectivement U et V les séries entières de la variable x associées, soit :

$$U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n \quad \text{et} \quad V(x) = \sum_{n \geq 0} v_n x^n$$

3.a) Démontrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que V a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

3.b) Montrer en utilisant la question préliminaire que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[, U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}$$

3.c) Justifier pour tout n entier naturel non nul la relation :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

3.d) En déduire, pour tout x strictement compris entre -1 et 1, l'égalité :

$$U(x) = 1 + U(x) V(x)$$

3.e) De la relation précédente, déduire une expression de $V(x)$ sur]-1,1[en fonction de p et de x.

3.f) En déduire, en utilisant la question préliminaire, un développement en série entière de V ne faisant pas intervenir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En admettant que, si une fonction est développable en série entière, ce développement est unique, donner une expression de v_n en fonction de n et p.

TROISIEME PARTIE *DES RESULTATS INTERESSANTS*

Dans tout cette partie on suppose : $p = 1/2$. On se propose d'étudier dans ce cas les différents résultats obtenus dans la première et la deuxième partie.

1.a) Démontrer par récurrence la relation :

$$E[R_{2n}] = (2n+1)\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} - 1$$

1.b) En admettant le résultat suivant :

$$\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

déterminer un équivalent lorsque n tend vers l'infini de $E[R_{2n}]$.

2.a) En utilisant à nouveau le résultat admis dans la question précédente et en considérant l'expression de v_n trouvée à la question II-3.f), vérifier par le calcul que la série numérique de terme général v_n est convergente.

2.b) En admettant de plus :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} V(x) = \sum_{n\geq 0} v_n$$

montrer que la somme de cette série est égale à 1. En déduire que l'on peut définir une variable aléatoire T égale au numéro du premier lancer à l'issue duquel le compteur affiche 0 pour la première fois (sans tenir compte de l'affichage initial).
Donner la loi de cette variable aléatoire. Admet-elle une espérance?

3.a) En utilisant les résultats des deux parties précédentes, justifier par un calcul direct la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

3.b) En déduire une expression de $(1 - u_{2n})$ en fonction des v_{2k} $(1 \leq k \leq n)$.

3.c) Après avoir explicité v_{2k} à l'aide des événements A_{2k} $(1 \leq k \leq n)$, démontrer que la probabilité que le compteur affiche 0 à l'issue du $2n$-ième lancer est égale à la probabilité qu'il n'ait jamais affiché 0 à l'issue d'aucun des $2n$ premiers lancers.